

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЕРТИКАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРЕХКОМПОНЕНТНОГО ВЕКТОРА СКОРОСТИ МОРСКИХ ТЕЧЕНИЙ

науч. сотр. Ю.П.КЛЕВАНЦОВ¹, д-р физ.-мат. наук В.А.РОЖКОВ²,
науч. сотр. К.Г.СМИРНОВ¹, студент Н.А.СУХИХ²

¹ – СПО ФГБУ «Государственный океанографический институт Н.Н.Зубова», Санкт-Петербург, e-mail: spbsoi@rambler.ru

² – Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, e-mail: varozhk@gmail.com

Дано обобщение векторно-алгебраического метода вероятностного анализа морских течений на более общий случай (три компонента, серия горизонтов).

Приведен пример анализа синхронных измерений трехкомпонентного вектора $\vec{U}(z,t)$ скорости течений прибором ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) на серии горизонтов (z) с минутной дискретностью за длительный промежуток времени в Финском заливе Балтийского моря. Перечислены актуальные проблемы анализа измерений течений в арктических морях (где ADCP-измерения уже имеются).

Ключевые слова: двухкомпонентный, трехкомпонентный вектор скорости течений, эпюра, математическое ожидание, дисперсия, ковариационный тензор, спектральная плотность, инварианты.

Измерения трехкомпонентного вектора скорости течений $\vec{U}(z,t)$ прибором ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) на серии горизонтов (z) в настоящее время являются основным источником сведений о динамике и вертикальной структуре морских вод. Статистический анализ измерений вектора $\vec{U}(z,t)$ с компонентами (u, v, w) в виде системы временных рядов, зависящих от вертикальной координаты z и времени t , требует обобщения (на трехмерное пространство) ранее предложенных методов [Белышев и др., 1983].

В настоящей работе обсуждаются вопросы:

– описания свойств реализации $\vec{U}(z,t)$ в терминах вектора математического ожидания $\bar{m}_{\vec{U}}(z)$, тензора дисперсии $D_{\vec{U}}(z)$, ковариационного тензора $K_{\vec{U}}(\tau, z)$, тензора спектральной плотности $S_{\vec{U}}(\omega, z)$ в стационарном приближении;

– представления вертикального профиля скорости $\vec{U}(z,t)$ в виде

$$\vec{U}(z,t) = \begin{cases} \sum_s \bar{a}_s(t) \varphi_s(z) & (1) \\ \sum_s [(a_s^u(t) \varphi_s^u(z)) \vec{i} + (a_s^v(t) \varphi_s^v(z)) \vec{j} + (a_s^w(t) \varphi_s^w(z)) \vec{k}] & (2) \\ \sum_s a_s(t) \varphi_s(z) & (3) \end{cases}$$

где $\varphi_s(z)$, $\bar{\varphi}_s(z)$ – ортогональный базис; $a_s(t)$, $\bar{a}_s(t)$ – коэффициенты; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные орты.

Для оценки изменений во времени вертикальной структуры течений использовались измерения скорости течений, полученные с помощью ADCP WorkHorse Sentinel

300 кГц. Этим прибором оснащена автоматическая придонная станция, установленная осенью 2009 г. в 3 км от берега в восточной части Финского залива сотрудниками Санкт-Петербургского отделения Государственного океанографического института им. Н.Н.Зубова. Глубина постановки станции – 20 м. Информация передается в оперативном режиме по кабель-тросу через модем на компьютер, установленный на ГМС «Шепелево».

Для иллюстрации выбрана реализация поля $\vec{U}(z, t)$, полученная с 19 октября по 21 ноября 2011 г. в Финском заливе в точке 59°58' с.ш. 29°05' в.д. у м. Шепелевский на 11 горизонтах с интервалом дискретности $\delta t = 1$ мин.

ВЕКТОР МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ И ТЕНЗОР ДИСПЕРСИИ

Вектор $\vec{m}_{\vec{U}}$ имеет проекции (m_u, m_v, m_w) , которые интерпретируются как математические ожидания проекций вектора $\vec{U}(t)$ на оси декартовой системы координат. При переходе к полярной системе координат модуль вектора вычисляется по этим проекциям по формуле $|\vec{m}_{\vec{U}}| = \sqrt{m_u^2 + m_v^2 + m_w^2}$.

Для гидрометеорологических задач представляет интерес относительный вклад вертикальной составляющей вектора m_w по сравнению с горизонтальной составляющей скорости $\vec{V}(t)$, модуль вектора математического ожидания которой равен $|\vec{m}_{\vec{V}}| = \sqrt{m_u^2 + m_v^2}$.

Тензор дисперсии определяется в виде тензорного произведения

$$D_{\vec{U}} = M \{ \vec{U}^0 \otimes \vec{U}^0 \} = \begin{pmatrix} D_{uu} & D_{uv} & D_{uw} \\ D_{vu} & D_{vv} & D_{vw} \\ D_{wu} & D_{wv} & D_{ww} \end{pmatrix},$$

где $\vec{U}^0 = \vec{U} - \vec{m}_{\vec{U}}$; по диагонали – дисперсии компонент, вне диагонали – ковариации.

Таблица 1

Значения средних и СКО скорости течения U на отдельных горизонтах в точке: 59°58' с.ш. 29°05' в.д. у м. Шепелевский

Горизонт, м	Скорость течения														
	Средние, см/с						СКО, см/с								
	Компоненты вектора			Вектор			$\delta t = \text{мин.}, N = 42822 \text{ мин.}$			$\delta t = 1 \text{ ч}, N = 793 \text{ ч}$			СКО внутри каждого часа $\delta t = 1 \text{ мин.}$		
	u	v	w	$ \vec{V} / \vec{U} $	φ_2°	Роль w , град.	u	v	w	u	v	w	u	v	w
0,2	-0,4	7,8	2,0	7,9/8,1	93	14	24,4	34,4	6,1	21,9	31,4	5,2	11,0	14,3	3,3
1,7	-4,0	1,1	0,7	4,2	164	10	8,7	14,4	2,0	6,5	12,9	0,6	5,8	6,5	1,9
3,2	-2,8	-2,1	0,2	3,5	217	4	6,6	12,2	0,9	5,9	11,8	0,3	3,0	3,4	0,9
4,7	-2,4	-1,9	0,0	3,1	219	0	9,8	11,2	0,8	5,5	10,9	0,2	2,6	2,7	0,8
6,2	-1,7	-1,5	-0,1	2,3	222	-2	5,6	10,3	0,8	5,1	10,0	0,2	2,5	2,5	0,7
7,7	-1,0	-0,9	-0,1	1,4	224	-5	5,4	9,5	0,7	4,9	9,2	0,2	2,4	2,4	0,7
9,2	-0,2	-0,1	-0,1	0,2/0,3	201	-33	5,2	8,7	0,7	4,7	8,4	0,2	2,3	2,4	0,7
10,7	0,6	1,1	-0,1	1,3	62	-7	5,1	7,7	0,7	4,6	7,4	0,2	2,2	2,3	0,7
12,2	1,4	2,4	-0,2	2,8	59	-3	5,1	6,8	0,7	4,7	6,5	0,2	2,1	2,2	0,7
13,7	2,1	3,5	-0,2	4,0/4,1	58	-2	5,3	6,0	0,7	4,9	5,6	0,2	2,0	2,1	0,7
15,2	2,7	4,2	-0,3	5,0	57	-3	5,7	5,4	0,7	5,3	5,0	0,2	2,1	2,1	0,6

Примечание: N – объем выборки, φ_2 – направление вектора скорости течения, $|\vec{V}|$ – модуль двухкомпонентного вектора, $|\vec{U}|$ – модуль трехкомпонентного вектора.

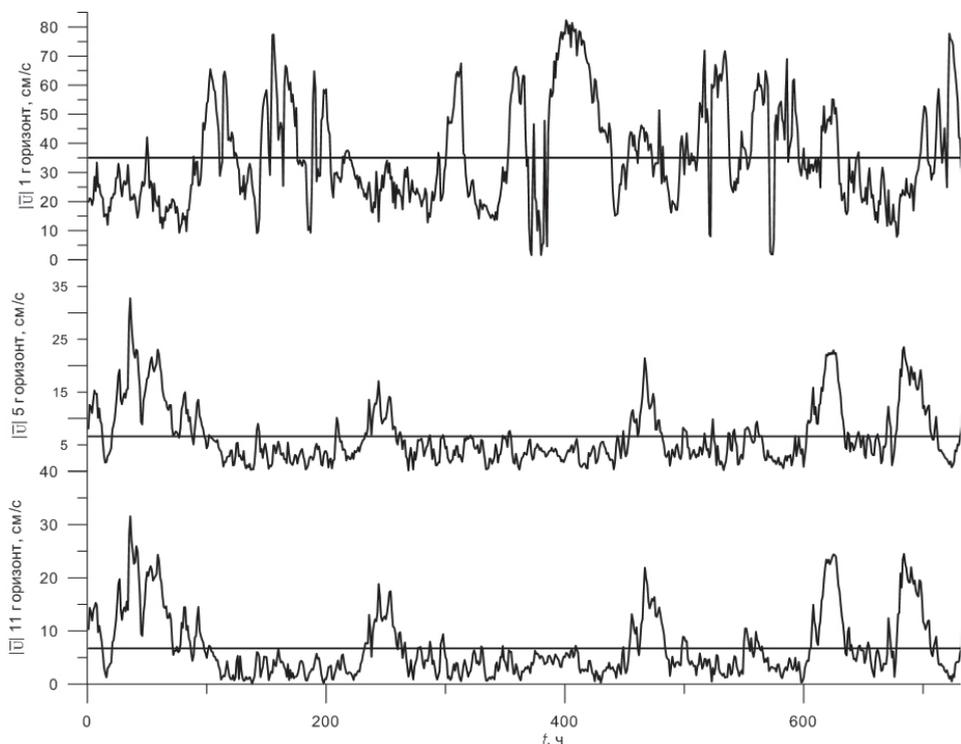


Рис. 1. Временные ряды модуля скорости течения на горизонтах 1, 5, 11.

В табл. 1 представлены средние значения (m_u^*, m_v^*, m_w^*) и оценки среднеквадратических внутрисуточных и среднесуточных $(\sigma_u^*, \sigma_v^*, \sigma_w^*)$ отклонений (СКО) компонентов скорости по вертикали и по времени.

Таблица 2

Собственные числа тензора дисперсий λ_i (см²/с²), инвариант $\sqrt{I_1}$ (см/с) тензора СКО, коэффициент изменчивости r

№ горизонта	По ежеминутным данным			По среднесуточным данным				
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_1	λ_2	λ_3	$\sqrt{I_1}$	r
1	1350,69	453,84	14,88	1125,69	363,86	2,42	38,63	4,77
2	224,31	60,54	3,34	184,02	25,06	0,26	14,47	3,44
3	172,56	21,04	0,84	162,02	11,84	0,07	13,19	3,77
4	146,40	15,29	0,60	139,60	8,64	0,05	12,18	3,93
5	124,14	13,27	0,55	118,03	7,33	0,04	11,20	4,87
6	106,68	13,44	0,53	101,08	8,07	0,03	10,45	7,46
7	89,08	13,66	0,50	83,76	8,66	0,03	9,62	32,05
8	72,08	13,40	0,48	67,21	8,74	0,03	8,72	6,71
9	59,30	13,66	0,47	54,79	9,28	0,03	8,01	2,86
10	51,26	13,10	0,46	46,94	8,99	0,02	7,48	1,82
11	48,42	13,00	0,45	44,25	8,85	0,03	7,29	1,46

Из табл. 1 видно, что:

– вектор $\vec{m}_{\bar{v}}$ средней (по времени) скорости течения $\vec{U}(z, t)$ изменяется по глубине как по модулю от 8 до 1 см·с⁻¹ в верхнем слое и от 0 до 5 см·с⁻¹ в придонном слое, так и по направлению в верхнем слое от 90 до 220° и довольно стабилен, около 60°, в придонном слое;

– вертикальная составляющая средней по времени скорости течения изменяется по z от 2 до 0 см·с⁻¹, но вызывает отклонение вектора $\vec{m}_{\bar{v}}$ от горизонтали на 2–15° вверх и вниз по вертикали.

Согласно табл. 1 СКО как внутрис часовых флюктуаций (с минутной дискретностью), так и среднечасовых значений скорости течения меняется по вертикали от 40 до 5 см·с⁻¹; интенсивность мелкомасштабной (внутрис часововой) и мезомасштабной (среднечасовой) изменчивости скорости имеют одинаковый порядок.

На рис. 1 приведены временные ряды $|\vec{U}(z, t)|$ на трех горизонтах (z_1, z_2, z_3).

В табл. 2 приведены значения собственных чисел тензора дисперсии скорости течений на разных горизонтах.

Из таблицы следует, что дисперсия вектора убывает с глубиной, а коэффициент изменчивости вектора $r = \sqrt{I_1} / |\vec{m}_{\bar{v}}|$, больше 1 на всех горизонтах.

КОВАРИАЦИОННЫЙ ТЕНЗОР ВРЕМЕННОГО РЯДА ЗНАЧЕНИЙ ТРЕХКОМПОНЕНТНОГО ВЕКТОРА СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ И ЕГО ИНВАРИАНТЫ

Всякий тензор можно разложить на сумму двух тензоров: симметричного S и антисимметричного A . В частности, ковариационную функцию стационарного векторного процесса $\vec{U}(t)$, определяемую [Клеванцов, Михайлов и др., 2009] как математическое ожидание тензорного произведения, можно записать в виде тензора

$$\begin{aligned}
 K_{\vec{U}}(\tau) &= M \left\{ \vec{U}^0(t) \otimes \vec{U}^0(t + \tau) \right\} = \begin{pmatrix} D_{uu} & K_{uv} & K_{uw} \\ K_{vu} & D_{vv} & K_{vw} \\ K_{wu} & K_{wv} & D_{ww} \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} D_{uu} & 0,5(K_{uv} + K_{vu}) & 0,5(K_{uw} + K_{wu}) \\ 0,5(K_{vu} + K_{uv}) & D_{vv} & 0,5(K_{vw} + K_{wv}) \\ 0,5(K_{wu} + K_{uw}) & 0,5(K_{wv} + K_{vw}) & D_{ww} \end{pmatrix} + \\
 &+ 0,5 \begin{pmatrix} 0 & (K_{uv} - K_{vu}) & (K_{uw} - K_{wu}) \\ (K_{vu} - K_{uv}) & 0 & (K_{vw} - K_{wv}) \\ (K_{wu} - K_{uw}) & (K_{wv} - K_{vw}) & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

В (4) тензор $K_{\vec{U}}(\tau)$ разложен на симметричную и антисимметричную части. Первую часть можно привести к диагональному виду с инвариантами $\lambda_{1,2,3}$, сумма которых равна линейному инварианту I_1 , интерпретируемому как математическое ожидание скалярного произведения векторов

$$I_1 = M \left\{ \vec{U}^0(t) \cdot \vec{U}^0(t + \tau) \right\}. \tag{5}$$

В (4) и (5) $\vec{U}^0 = \vec{U} - \vec{m}_U$.

Симметричному тензору соответствует поверхность второго порядка – эллипсоид с осями $\lambda_{1,2,3}$. Антисимметричный (кососимметричный) тензор может быть представлен в виде $A = E \times \vartheta$, где E – единичный тензор:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ϑ -вектор с компонентами:

$$\vec{\vartheta} = \begin{pmatrix} (K_{vw} - K_{wv}) \\ (K_{uw} - K_{wu}) \\ (K_{uv} - K_{vu}) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Вектору (6) может быть поставлено в соответствие математическое ожидание векторного (косого) произведения векторов скорости течений

$$\begin{aligned} \vartheta(\tau) &= M \{ \vec{U}^0(t) \times \vec{U}^0(t + \tau) \} = M \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u(t) & v(t) & w(t) \\ u(t + \tau) & v(t + \tau) & w(t + \tau) \end{pmatrix} = \\ &= (K_{vw} - K_{wv})\vec{e}_1 + (K_{uw} - K_{wu})\vec{e}_2 + (K_{uv} - K_{vu})\vec{e}_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Вектор (7) характеризует вращение в трехмерном пространстве.

На рис. 2 приведены графики инвариантов (5) и (6) тензора ковариационной функции трехкомпонентного вектора скорости течений, вычисленного по реализации среднечасовых значений.

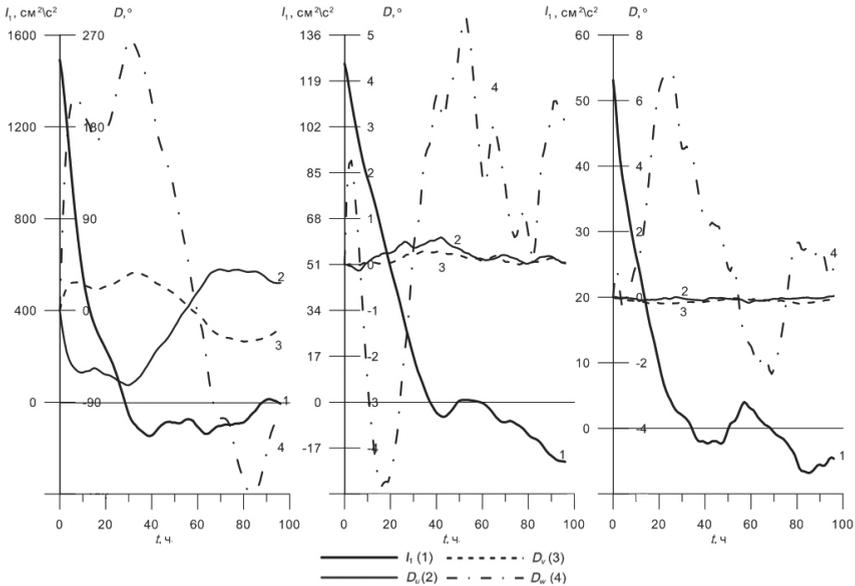


Рис. 2. Линейные инварианты и составляющие индикатора вращения на горизонтах 1, 5, 11: D_u – индикатор вращения в плоскости (v, w) , D_v – индикатор вращения в плоскости (u, w) , D_w – индикатор вращения в плоскости (u, v) .

График инварианта (5) на поверхностном горизонте имеет вид экспоненциально-косинусной функции, характерной для диапазона синоптической изменчивости (когда реализация представляет собой последовательность «штормов» и «окон погоды»). В частности, первый нуль коррелограммы расположен при 30 ч, а второй при 90 ч; с глубиной эта закономерность трансформируется.

Каждый из компонентов вектора (6) характеризует вращение вокруг одной из трех осей. Поскольку часовое осреднение фильтрует мелкомасштабные флюктуации, то наиболее нагляден график третьего компонента, являющегося индикатором вращения в горизонтальной плоскости с синоптической цикличностью.

ТЕНЗОР СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ВРЕМЕННОГО РЯДА ЗНАЧЕНИЙ ТРЕХКОМПОНЕНТНОГО ВЕКТОРА СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ И ЕГО ИНВАРИАНТЫ

В стационарном приближении этот тензор определяется через преобразование Фурье ковариационного тензора

$$S_{\vec{U}}(\omega, z) = \frac{1}{2\pi} \int K_{\vec{U}}(\tau, z) \exp(-i\omega\tau) d\tau \quad (8)$$

и записывается в виде суммы

$$S_{\vec{U}}(\omega, z) = \begin{pmatrix} S_u & 0,5(S_{uv} + S_{vu}) & 0,5(S_{uw} + S_{wu}) \\ 0,5(S_{vu} + S_{uv}) & S_v & 0,5(S_{vw} + S_{wv}) \\ 0,5(S_{wu} + S_{uw}) & 0,5(S_{wv} + S_{vw}) & S_w \end{pmatrix} + \\ + 0,5 \begin{pmatrix} 0 & (S_{uv} - S_{vu}) & (S_{uw} - S_{wu}) \\ (S_{vu} - S_{uv}) & 0 & (S_{vw} - S_{wv}) \\ (S_{wu} - S_{uw}) & (S_{wv} - S_{vw}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Напомним, что в (9) по диагонали симметричной части тензора расположены спектральные плотности (S_u, S_v, S_w) компонентов вектора $\vec{U}(t)$, вне диагонали симметричной и антисимметричной частей этого тензора – линейные комбинации взаимных спектральных плотностей компонентов вектора $\vec{U}(t)$. Для стационарных случайных процессов $\zeta(t), \eta(t)$ автоспектральные плотности всегда вещественны, а взаимные

$$S_{\zeta\eta}(\omega) = C_{\zeta\eta}(\omega) + iQ_{\zeta\eta}(\omega), \quad S_{\eta\zeta}(\omega) = C_{\eta\zeta}(\omega) - iQ_{\eta\zeta}(\omega) \quad (10)$$

комплекснозначные, комплексно-сопряженные. В формуле (10):

$$C_{\zeta\eta}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} [K_{\zeta\eta}(\tau) + K_{\eta\zeta}(\tau)] \cos(\omega\tau) d\tau - \text{коспектр},$$

$$Q_{\zeta\eta}(\omega) = 2 \int_0^{\infty} [K_{\zeta\eta}(\tau) - K_{\eta\zeta}(\tau)] \sin(\omega\tau) d\tau - \text{куспектр}.$$

Очевидно, что $C_{ij}(\omega) = C_{ji}(\omega)$, $Q_{ij}(\omega) = -Q_{ji}(\omega)$. Следовательно,

$$C_{\vec{U}}(\omega) = \begin{pmatrix} S_u & C_{uv} & C_{uw} \\ C_{uv} & S_v & C_{vw} \\ C_{uw} & C_{vw} & S_w \end{pmatrix}.$$

Вектор $\vartheta_{\vec{U}}(\omega)$ имеет компоненты
$$\begin{pmatrix} Q_{uv} \\ Q_{uw} \\ Q_{vw} \end{pmatrix}.$$

**РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ $\vec{U}(z, t)$ ПО СИСТЕМЕ $\varphi(z)$
ПОЛИНОМОВ П.Л.ЧЕБЫШЕВА, ОРТОГОНАЛЬНЫХ
НА КОНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ ТОЧЕК**

В данном варианте обобщение рассмотренного для двухкомпонентного вектора в работе [Бухановский, Захарченко и др., 1999] на трехкомпонентный вектор сводится лишь к записи в (1) как вектора с тремя компонентами (a_k^u, a_k^v, a_k^w) .

Полиномы $\varphi_k(z)$ в (1) вычисляются по рекуррентным формулам

$$\varphi_0(z) \equiv 1, \quad \varphi_1(z) = z - \frac{m+1}{2}, \quad \varphi_{k+1}(z) = \varphi_1 \varphi_k - \frac{k^2(m^2 - k^2)}{4(4k^2 - 1)} \varphi_{k-1}, \quad (11)$$

$k = 1, 2, \dots, m-1.$

Из (11) видно, что базисные функции $\varphi(k)$ при разных k являются алгебраическими полиномами различных порядков (прямая линия, квадратичная, кубическая параболы и т.д.). Коэффициенты a_k в (1) определяются через скалярное произведение $(\zeta(t), \eta(t))$ функций, где под ζ понимается любая из проекций вектора \vec{U} ; для полиномов (11)

$$a_k = \frac{\sum_{j=1}^m \zeta(z_j) \varphi_k(z_j)}{\sum_{j=1}^m \varphi_k^2(z_j)}. \quad (12)$$

Обозначим сумму первых s членов через

$$\tilde{\zeta}_s(z) = \sum_{k=0}^s a_k \varphi_k(z), \quad (13)$$

сумму квадратов отклонений (13) от $\zeta(z)$ через

$$\delta_s^2 = \sum_{j=1}^m [\zeta(z_j) - \tilde{\zeta}_s(z_j)]^2. \quad (14)$$

Учитывая ортогональность полиномов (11), формула (14) приводится к виду

$$\delta_s^2 = \sum_{j=1}^m \zeta^2(z_j) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=0}^s a_k^2 \varphi_k^2(z_j). \quad (15)$$

Последовательность значений δ_s^2 характеризует скорость сходимости аппроксимативного выражения (13) к $\zeta(z)$.

**РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ ПО СИСТЕМЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ
ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (ЕОФ)**

Наилучшим приближением функции $\zeta(z_k)$, заданной на конечной системе точек (z_k) , является ее разложение по системе ЕОФ, интерпретируемой как система собственных векторов матрицы дисперсии многомерной случайной величины ζ_k .

Для метеорологических процессов и полей этот подход использован в работе [Мешерская, Руховец и др., 1970], для вертикального распределения двумерного вектора скорости течения – в работе [Василенко, Мирабель, 1976].

Для каждого из трех компонентов вектора $\vec{U}(z, t)$ матрицы дисперсии $D_{ij}^u, D_{ij}^v, D_{ij}^w$ результатов измерений на системе горизонтов имеют вид симметричной матрицы, на диагонали которой стоят дисперсии, а вне диагонали – ковариации.

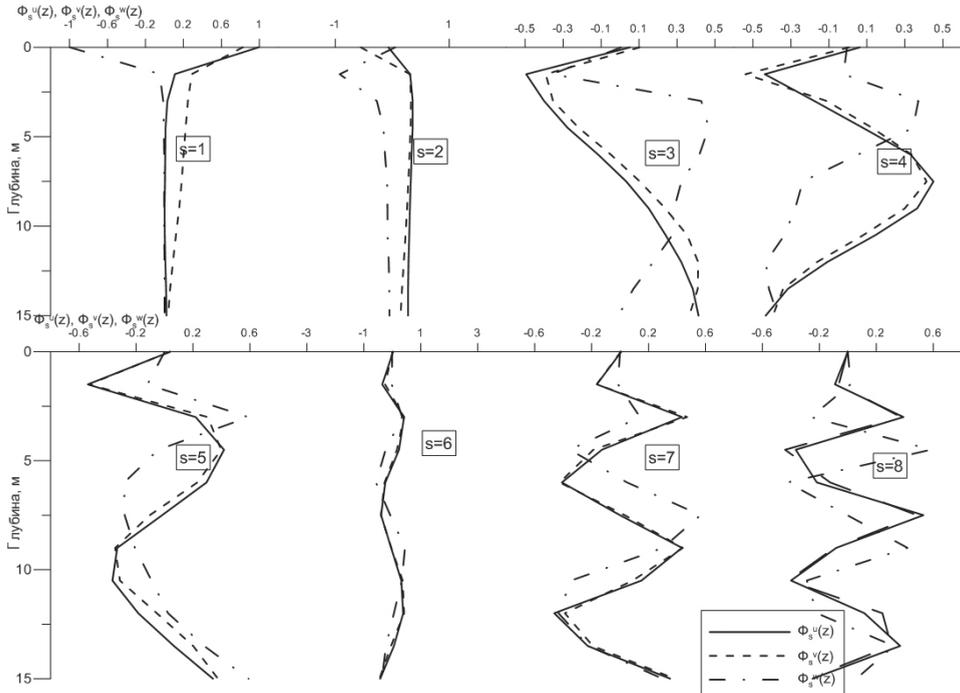


Рис. 3. Базисы $\Phi_s^u(z)$, $\Phi_s^v(z)$, $\Phi_s^w(z)$ ЕОФ.

На рис. 3 представлены графики ЕОФ, вычисленных по всей выборке среднечасовых значений скорости течения.

Коэффициенты разложения вычисляются по формуле

$$a_k = \sum_{j=1}^m \zeta(z_j) \varphi_{kj}, \quad (16)$$

которая аналогична (12) с учетом обозначений $\varphi_{kj} \equiv \varphi_k(z_j)$ и ортонормированности ЕОФ, обладающих свойством $\sum_{j=1}^m \varphi_{kj}^2 = 1$. Очевидно, что собственные числа λ_k представляют собой дисперсии соответствующих коэффициентов (16). Следовательно, вместо (15) скорость сходимости определяется величиной

$$\bar{\delta}_s^2 = \sum_{j=1}^m D_j - \sum_{j=1}^s \lambda_j. \quad (17)$$

Значения собственных чисел λ_k даны в табл. 3.

Из таблицы видно, что разложение по системе ЕОФ сходится быстрее, чем по полиномам Чебышева; можно ограничиться всего тремя членами.

Следует отметить, что представление (2) отличается от (1) тем, что у каждой из проекций существует собственный базис. Это означает, что $a_k^{(i)}$ не могут быть интерпретированы как проекции векторного коэффициента \bar{a}_k .

В то же время базисы ЕОФ $\varphi_k^{(i)}$ для проекций требуют проверки на их ортогональность. Результаты вычислений скалярных произведений $(\varphi_k^{(i)}, \varphi_k^{(j)})$ базисных векторов ЕОФ проекций (u, v, w) скорости течений $\vec{U}(z, t)$ и угла $\psi = \arccos(\varphi_k^{(i)}, \varphi_k^{(j)})$ в радианах показали, что скалярные произведения отличны от 0, т.е. угол ψ не равен 90° .

Значения собственных чисел λ_k для матриц D_{ij}^u , см²/с²

λ_k	u	v	w
λ_1	485,42	1213,12	26,95
λ_2	190,19	515,28	0,25
λ_3	50,85	58,24	0,15
λ_4	16,09	18,57	0,07
λ_5	6,24	6,22	0,05
λ_6	2,91	3,46	0,02
λ_7	1,47	1,55	0,02
λ_8	0,64	0,71	0,01
λ_9	0,40	0,28	0,01
λ_{10}	0,06	0,10	0,01
λ_{11}	0,14	0,17	0,01

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ $\vec{U}(z, t)$ ПО СИСТЕМЕ $\varphi_k(z)$ ВЕКТОРНЫХ ЕСТЕСТВЕННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ (ВЕОФ)

В работе [Бухановский, Рожков, 2002] сформулировано понятие «векторной естественной ортогональной функции» как собственного вектора $\vec{\Phi}_{kj}$, блочной матрицы дисперсии

$$D_z^{\vec{U}} = \begin{pmatrix} D_1 & \cdots & K_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{ji} & \cdots & D_m \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где по диагонали стоят матрицы дисперсии на каждом из горизонтов, а вне диагонали – ковариационные тензоры при $\tau = 0$ между горизонтами. Очевидно, если использовать все 11 горизонтов (табл. 1), то порядок матрицы (18) будет (33×33). В целях наглядности ограничимся только тремя горизонтами, тогда порядок матрицы (18) будет (9×9), и обсудим на этом примере отличия использования разложения вида (2) и (3) для трехкомпонентного вектора $\vec{U}(z, t)$.

Таблица 4

Значения собственных чисел λ_k для матрицы $D_z^{\vec{U}}$, см²/с²

λ_k	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
Значение	1141,00	387,57	107,68	18,98	7,68	5,77	1,81	0,04	0,03

В табл. 4 приведены значения собственных чисел λ_k , вычисленные по матрице (18).

Сопоставляя табл. 4 и табл. 3 можно сделать вывод о том, что векторный базис $\vec{\Phi}_k(z)$ в (3) оптимален по сравнению с (2), кроме того ортогональность проекций (u , v , w) скорости \vec{U} заложена в конфигурацию матрицы (18).

Скалярные коэффициенты в (3) вычисляются по формуле

$$a_k(t) = \left(\vec{U}(t, z) \cdot \vec{\Phi}(z_j) \right), \quad (19)$$

что упрощает анализ временной изменчивости вертикального распределения скорости течений. Однако представить графически 33-мерный векторный базис весьма затруднительно, в то время как базис в (2) легко интерпретировать (рис. 3). Возникают слож-

ности в анализе временной изменчивости вертикальной структуры течений. Поэтому каждый из трех (1–3) вариантов записи $\vec{U}(z, t)$ имеет свои достоинства и недостатки.

ВЫВОДЫ

1. Поскольку одним из основных источников сведений о динамике и вертикальной структуре морских вод являются синхронные измерения трехкомпонентного вектора $\vec{U}(z, t)$ скорости течений прибором ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) на серии горизонтов (z) с минутной дискретностью за длительный промежуток времени возникла необходимость развить ранее предложенный в работе [Бельшев, Клеванцов и др., 1983] векторно-алгебраический метод вероятностного анализа морских течений на более общий случай (три компонента, серия горизонтов). Эта проблема решена в данной работе.

2. Такое обобщение поставило ряд дальнейших (но еще не решенных) вопросов:
– переход от плоских к трехмерным векторам значительно усложнил статистический анализ измерений вектора $\vec{U}(z, t)$ с компонентами (u, v, w) в виде системы временных рядов, зависящих от вертикальной координаты z и времени t ; готов ли потребитель (океанолог, гидротехник, судоводитель, инженер) к восприятию такой многомерной информации?

– точность и достоверность измерений ADCP требует сопоставления (верификации, валидации) с ранее используемыми средствами измерений течений, без этих результатов мы не сможем сравнить «новые» и «старые» измерения; в данной работе очерчен лишь один из возможных подходов к решению этой проблемы (анализ среднечасовых значений и оценка роли мелкомасштабных флюктуаций).

3. В данной работе схематично рассмотрен анализ месячной серии измерений течений в Финском заливе Балтийского моря; необходимо накопить опыт анализа измерений течений в других, в частности арктических, морях (где ADCP-измерения уже имеются).

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Бельшев А.П., Клеванцов Ю.П., Рожков В.А. Вероятностный анализ морских течений. Л.: Гимиз, 1983. 264 с.
- Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка натуральных данных. М.: Мир, 1980. 536 с.
- Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. Тойбнер, 1981. 720 с.
- Бухановский А.В., Захарченко Е.Н., Иванов Н.Е., Клеванцов Ю.П., Рожков В.А. Вероятностный анализ и моделирование вертикально неоднородного океанологического поля // Навигация и гидрография. 1999. № 9 С. 86–103.
- Бухановский А.В., Рожков В.А. Многомерный статистический анализ связанных гидрометеорологических полей // Труды ГОИН. 2002. Вып. 208. С. 338–364.
- Василенко В.М., Миравель А.П. О параметризации вертикальной структуры течений в тропической Атлантике с помощью статистически ортогональных функций // Океанология. 1976. Т. 16. Вып. 2. С. 220–222.
- Васильев И.Н., Рожков В.А. Применение цифровой вычислительной машины для аппроксимации дискретных полей // Труды ГОИН. 1965. Вып. 86. С. 113–123.
- Клеванцов Ю.П., Микулинская С.М., Рожков В.А. Об анализе векторов скорости морских течений // Метеорология и гидрология. 1996. № 9. С. 96–105.

Клеванцов Ю.П., Михайлов А.Е., Рожков В.А. Статистический анализ данных измерений трех-компонентного вектора скорости течений в восточной части Финского залива // Труды ГОИН. 2009. Вып. 212. С. 89–106.

Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: АН СССР, 1961. 426 с.

Маделунг Э. Математический аппарат физики. М.: Наука, 1968. 620 с.

Мещерская А.В., Руховец Л.В., Юдин М.И., Яковлева Н.И. Естественные составляющие метеорологических полей. Л.: Гимиз, 1970. 200 с.

Рожков В.А. Теория и методы статистического оценивания вероятностных характеристик случайных величин и функций с гидрометеорологическими примерами. Т. 2. СПб.: Гидрометеоздат, 2002. 780 с.

YU.P.KLEVANTSOV, V.A.ROZHKOV, K.G.SMIRNOV, N.A.SUKHIKH

STATISTICAL ANALYSIS OF VERTICAL DISTRIBUTION OF THE SEA CURRENT VELOCITY THREE-COMPONENT VECTOR

The generalization of vector-algebraic method of sea current probabilistic analysis was given to the more common case (three-component vector, set of data on different horizons). The example of synchronous measurements of three-component vector $\vec{U}(z,t)$ of current velocity by the device ADCP (Acoustic Doppler Current Profiler) on the set of horizons (z) with minute discreteness in extended time lapse in the Gulf of Finland of the Baltic Sea was cited. The actual problems of current measurement analysis in arctic seas (where ADCP-measurements already are in hand) are listed.

Keywords: sea current two-component, three-component vector, epure, expectation, variance, co-variation tensor, spectral density, invariants.